ENSA - Kenitra

Epreuve de traitement du signal

On Considère un filtre de réponse impulsionnelle $H(t)$. On suppose que l'on a à l'entrée $E(t)+B(t)$ où $E(t)$ est le signal utile et $B(t)$ le signal perturbateur. Tous ces signaux, ainsi que H, sont supposés d'énergie finie.

① Prouver que la sortie $S_E(t)$ qui correspond à $E(t)$ s'écrit

$$S_E(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{H}(\nu)\,\hat{E}(\nu)\,e^{2i\pi\nu t}\,d\nu.$$

② Si $S_B(t)$ est la sortie correspondant à $B(t)$, prouver que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|S_B(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{H}(\nu)|^2\,|\hat{B}(\nu)|^2\,d\nu.$$

③ On définit le rapport signal sur bruit comme suit

$$\rho(t)=\frac{|S_E(t)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}|S_B(t)|^2\,dt}$$

a) On pose $|F(\nu)|=|\hat{H}(\nu)|\,|\hat{B}(\nu)|$ et $F(\nu)\,\overline{G(\nu)}=\hat{H}(\nu)\hat{E}(\nu)e^{2i\pi\nu t}$

Prouver que $\rho(t)\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|G(\nu)|^2\,d\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{E}(\nu)|^2}{|\hat{B}(\nu)|^2}\,d\nu$

b) Quelle est la valeur maximale de $\rho(t)$? Montrer que le filtre réalisant cette V. max est donné par

$$H(t)=k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\hat{E}(\nu)}}{|\hat{B}(\nu)|^2}\,e^{2i\pi\nu(t-t_0)}\,d\nu$$

où $\rho(t_0) = V.\max$ et k une Constante

(4°) On pose $\overline{|\hat{B}(\nu)|^2} = \gamma_0$ Constante positive. Prouver que

$$\hat{H}(\nu) = k \frac{\overline{\hat{E}(\nu)}}{\gamma_0} e^{-2i\pi\nu t_0}$$ et en déduire $H(t)$.

(5°) Prouver que le maximum de rapport signal sur bruit est $\rho(t_0) = \dfrac{\|E\|_2^2}{\gamma_0}$.

Quel est le rôle de t_0 dans l'optimisation du filtrage?!

(6) Si $E(t) = \dfrac{\sin[\pi\alpha(t+\tau)]}{\pi(t+\tau)}$ et $B(t) = \dfrac{\sin \pi\beta t}{\pi t}$ calculer $\hat{E}(\nu)$ et $\hat{B}(\nu)$; Calculer $S_E(t)$ et $S_B(t)$; Calculer $S_E(t) + S_B(t)$ et préciser pour quelle(s) valeur(s) de t cette sortie est maximale. Quel est le rapport optimum signal sur bruit?